CALITATE
SI
FIABILITATE

Sef lucrari ing. Alin-Iulian DOLAN

CONCEPTUL DE CALITATE

CALITATEA reprezinta ansamblul de proprietati si caracteristici ale unui produs sau serviciu care ii confera acestuia proprietatea de a satisface nevoile exprimate sau implicite

Principalele caracteristici de calitate

1. **Dupa natura si efectul pe care il au in procesul de utilizare**
   - tehnice (insusirile valorii de intrebuintare a produsului)
   - psiho-senzoriale (efecte estetice, ergonomice)
   - de disponibilitate (fiabilitate, mentenabilitate)
   - de ordin social general (efecte asupra mediului)

2. **Dupa modul de compensare**
   - masurabile direct (ex: greutatea)
   - masurabile indirect (ex: fiabilitatea unui utilaj determinata pe baza probelor de rezistenta la uzura)
   - comparabile obiectiv cu mostra etalon (ex: numarul de defecte dintr-un interval spatial)
   - comparabile subiectiv cu mostra etalon (ex: finisajul unui produs)

PROBLEMELE CALITATII

Standarde, norme, reglementari

Documente care prescriu calitatea produselor

- standard
- caiet de sarcini
- norma tehnica

Documente care certifica calitatea produselor

- buletin de analiza
- certificat de omologare
- certificat de garantie
- certificat de calitate

STANDARDUL reprezinta ansamblul de reguli tehnice obligatoriu prin care se stabilesc, potrivit nivelului dezvoltarii tehnice intr-un anumit moment, caracteristicile tehnico-economice pe care trebuie sa le indeplineasca un produs precum si prescriptiile privind receptia, marcarea, depozitarea, transportul

Standarde internationale

- **ISO 9000.** Sistemele calitatii. Conducerea si asigurarea calitatii. Linii directoare pentru alegere si utilizare.
- **ISO 9001.** Sistemele calitatii. Model pentru asiguarea calitatii in proiectare, dezvoltare, productie, montaj si service.
- **ISO 9002.** Sistemele calitatii. Model pentru asigurarea calitatii in productie si montaj.
- **ISO 9003.** Sistemele calitatii. Model pentru asigurarea calitatii in inspectii si incercari finale.
- **ISO 9004.** Conducerea calitatii si elemente ale sistemului calitatii. Linii directoare.

CAIETUL DE SARCINI este un document tehnico-normativ care vine sa intregeasca prevederile standardelor sau normelor tehnice cu noi parametri. Se elaboreaza prin conlucrarea furnizorului cu beneficiarul, stabilind pe langa nivelul de calitate a produselor metodele de control, modalitatile de receptie, ambalare, livrare.

NORMA TEHNICA reprezinta documentatia tehnico-economica in care sunt cuprinse prescriptiile de calitate a unui produs.

BULETINUL DE ANALIZA este un document de certificare a calitatii prin care se face o descriere detaliata a anumitor caracteristici fizice, mecanice ale produsului.

CERTIFICATUL DE OMOLOGARE este documentul prin care se face omologarea produselor, cu scopul de a verifica daca produsele noi corespund documentatiei tehnico-economice.

CERTIFICATUL DE GARANTIE este documentul prin care se garanteaza calitatea produsului.

CERTIFICATUL DE CALITATE este documentul care certifica calitatea produselor in raportul dintre unitati. El trebuie sa mentioneze incercarile fizice, mecanice, chimice, organoleptice si probele la care a fost supus produsul in conformitate cu documentele tehnico-normative sau alte conditii de calitate prevazute in contract.

Indicatorii de caracterizare a nivelului calitatii

- **Indicatori ai calitatii productiei** care exprima procesul de innoire a productiei prin modernizari, asimilari.

- **Indicatori ai calitatii produselor** care reflecta in final caracteristicile produselor ca rezultat al procesului de conceptie si executie:

    - **Indicatori partiali ai calitatii produselor** (specifice), masoara gradul de dezvoltare a caracteristicilor specifice fiecarui produs prevazut in standarde, norme interne sau caiete de sarcini sub forma unor limite pe care trebuie sa le respecte produsele.

    - **Indicatorii claselor sau sorturilor de calitate** se utilizeaza in ramurile industriale unde produsele pot fi incadrate pe mai multe clase de calitate (I, II).

    - **Indicatorii noncalitatii** reflecta deficientele calitative ale procesului de productie si exprima ponderea rebuturilor, remanierilor, reclamatiilor de la beneficiari in totalul productiei. (treapta I – ***analitici***, treapta II – ***sintetici***, treapta III – ***complex***)

CONTROLUL CALITATII

Etape ale controlului calitatii

1. Etapa de conceptie si proiectare
2. Pregatirea materiala a fabricatiei
3. Asigurarea concordantei intre calitatea conceptiei si calitatea fabricatiei
4. Controlul produselor finite
5. Calitatea produselor la beneficiari, comportarea lor in exploatare, colectarea de critici, observatii, tendinte

Masurarea nivelului calitatii produselor

1. Metoda experimentala
2. Metoda expertizei
3. Metoda sociologica
4. Metoda statistica

Controlul statistic al calitatii se bazeaza pe controlul prin esantionare, in cadrul caruia prin esantionul extras, controlat in totalitate, se obtin rezultate si concluzii asupra intregului proces de fabricatie sau lot de produse finite privind stabilitatea fabricatiei, capabilitatea proceselor de fabricatie, precizia de realizare a caracteristicilor de calitate controlata

- ***controlul statistic la receptia loturilor de produse pe baza nivelului de calitate acceptabil (AQL)***
- ***controlul statistic pe flux de fabricatie***

Nivelul de calitate acceptabil (AQL) este nivelul de calitate care corespunde unei probabilitati de acceptare specificate relativ ridicate intr-un plan de verificare; reprezinta fractiunea defectiva maxima (sau numarul maxim de defecte pe 100 de unitati de produs) care, in scopul verificarii calitatii prin esantionare, poate fi considerata in mod satisfacator drept calitate medie a procesului de fabricatie la furnizor

Procedee:

- ***verificarea calitatii prin atribute***
- ***verificarea calitatii prin masurare*** (metodele s, R, σ)

Planul de verificare:

- ***Nivelul de calitate acceptabil AQL***
- ***Nivelul de verificare Nv***
- ***Tipul de esantionare***
- ***Gradul de severitate***

ELEMENTE DE TEORIA PROBALITATILOR

Algebra Boole

O mulțime $\mathscr{B}$, nevida, cu doua operații binare si una unara:

$\vee$ (sau) $\wedge$ (si) $^{-}$ (non)

Care satisfac următoarele axiome :

1) asociativitate $A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C;\ A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$

2) comutativitate $A \vee B = B \vee A;\ A \wedge B = B \wedge A$

3) distributivitate $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C);$
$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

4) absorbție $(A \vee B) \wedge B = B;\quad (A \wedge B) \vee B = B$

5) complementaritate $(A \wedge \bar{A}) \vee B = B;\quad (A \vee \bar{A}) \wedge B = B \qquad \forall A,B,C \in \mathscr{B}$

Elementul minimal $(A \wedge \bar{A}) = \theta$ **Elementul maximal** $(A \vee \bar{A}) = \Omega$

a = **atom** al algebrei daca : $\forall A \in \mathscr{B},\quad A \subset a \quad \Rightarrow \quad A = \theta$ sau $A = a$

Proprietati: $\forall i \neq j \quad \Rightarrow \quad a_i \wedge a_j = \theta$

$$\forall A \in \mathscr{B} \quad \Rightarrow \quad A \overset{unic}{=} \bigvee_i a_i$$

Exemple de alegebre Boole

- **Algebra de parti Σ a unei multimi Ω**

$$\Sigma \subset P(\Omega): \quad \forall\ A,B \in \Sigma \ \Rightarrow\ A \cup B \in \Sigma$$
$$\forall\ A \in \Sigma \ \Rightarrow\ \bar{A} \in \Sigma$$

$$\Sigma_1 = \{\varnothing, \Omega\}; \qquad \Sigma_2 = \{\varnothing, A, \bar{A}, \Omega\};$$
$$\Sigma_3 = \{\varnothing, A, B, A \cup B, \bar{A}, \bar{B}, \overline{A \cup B}, \Omega\} \quad (A \cap B = \varnothing)$$

Orice algebra de parti este o algebra Boole in raport cu operatiile $\cup$, $\cap$, $\bar{\ }$

Elementul minimal **θ** = multimea vida $\varnothing$

Elementul maximal **Ω** = multimea Ω

- **Alegebra propozitiilor P**

Multimea claselor de echivalenta E (propozitii care au acelasi sens logic) formeaza o algebra Boole in raport cu operatiile **si, sau, non**

Elementul minimal **θ** = clasa propozitiilor false

Elementul maximal **Ω** = clasa propozitiilor adevarate

EXPERIENTA STOCASTICA = experienta ale carei rezultate nu pot fi prevazute cu certitudine

EVENIMENT OBSERVABIL = un rezultat posibil al unei experiente stocastice

EVENIMENT ELEMENTAR = un eveniment ce furnizeaza mximum de informatie asupra rezultatului experientei. Pe baza evenimentelor elementare se pot descrie toate evenimentele observabile

EVENIMENT SIGUR = evenimentul ce se produce cu certitudine in cadrul experientei in conditiile date

EVENIMENT IMPOSIBIL = evenimentul care nu se produce niciodata in cadrul experientei in conditiile date

EVENIMENTE INCOMPATIBILE = evenimentele care nu se pot realiza in acelasi timp in cadrul experientei in conditiile date

(Ω, Σ) = camp de evenimente

Exemple de campuri de evenimente

- Aruncarea monedei $\Omega = \{B, M\}$

- Aruncarea a doua monede $\Omega = \{BB, BM, MB, MM\}$

- Aruncarea zarului $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- Aruncarea a doua zaruri $\Omega = \{(1,1), (1,2), \ldots, (6,6)\}$

- Aruncarea de *n* ori a unui zar $\Omega = \{(a_{k1}, a_{k2}, \ldots, a_{kn})\}$

  $ki = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, i = \{1, \ldots, n\}$

- Aruncarea monedei pana la aparitia fetei M

  $\Omega = \{M, BM, BBM, \ldots, BB\ldots BM, \ldots\}$

- Tragerea la tinta $\Omega = \{$toate punctele tintei + un punct din afara ei$\}$

PROBABILITATI

Definitia clasica: Se numeste ***probabilitatea evenimentului A*** raportul dintre numarul ***m*** de rezultate favorabile producerii evenimentului A si numarul total ***n*** de rezultate ale experientei, considerate egal posibile

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Se numeste ***frecventa relativa de aparitie a evenimentului A*** raportul dintre numarul probelor in care evenimentul *A* s-a produs ***n*(*A*)** si numarul total ***n*** de probe efectuate

$$f_{\mathrm{r}}(A) = \frac{n(A)}{n}$$

Definitia statistica: $$P(A) = \lim_{n\to\infty} f_{\mathrm{r}}(A)$$

Definitia axiomatica: Se numeste ***probabilitate*** pe campul de evenimente (Ω, Σ) o functie *P* : Σ → **R** care satisface urmatoarele axiome:

$$a)\ \forall A \in \Sigma, \quad P(A) \geq 0$$

$$b)\ P(\Omega) = 1$$

$$c)\ \forall A, B \in \Sigma, \quad daca \quad A \cap B = \varnothing \quad \Rightarrow \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

(Ω, Σ, P) = camp de probabilitate

Definitie: Se numeste ***probabilitatea evenimentului A conditionat de evenimentul B***, probabilitatea lui ***A*** daca ***B*** este sigur:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \wedge B)}{P(B)}$$

Definitie: Evenimentele ***A*** si ***B*** se numesc ***independente*** daca probabilitatea de aparitie simultana este egala cu produsul probabilitatilor:

$$P(A \wedge B) = P(A)P(B) \quad \Leftrightarrow \quad P(A \mid B) = P(A) \quad \Leftrightarrow \quad P(B \mid A) = P(B)$$

Definitie: Un ***sistem complet de evenimente*** $\boldsymbol{H_i}$, $i = \{1 \ldots n\}$ este o familie de evenimente observabile care satisfac urmatoarele conditii:

$$1)\ \bigvee_i H_i = \Omega \qquad H_i \subset \Omega$$

$$2)\ \forall\, i \neq j \qquad H_i \wedge H_j = \theta$$

P/1 Un eveniment observabil oarecare ***B*** poate avea loc simultan cu unul din evenimentele $\boldsymbol{H_i}$, admitand o descompunere in evenimente incompatibile:

$$B = \bigvee_i (B \wedge H_i) \qquad \forall\, i \neq j \;\Rightarrow\; (B \wedge H_i) \wedge (B \wedge H_j) = \theta$$

P/2 *Formula probabilitatilor totale:* $\mathrm{P}(B) = \sum_i \mathrm{P}(B \mid H_i) \cdot \mathrm{P}(H_i)$

P/3 *Formula lui Bayes:* $\mathrm{P}(H_i \mid B) = \mathrm{P}(H_i) \dfrac{\mathrm{P}(B \mid H_i)}{\sum_i \mathrm{P}(B \mid H_i) \cdot \mathrm{P}(H_i)}$

VARIABILE ALEATORII

Definitie: Se numeste ***variabila aleatorie*** **(*v.a.*)** o marime ce poate lua in cadrul unei experiente una din valorile sale posibile necunoscute dinainte, dar care sunt mai mult sau mai putin frecvente la repetarea experientei

$$\xi : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_n \end{pmatrix}$$

$p = P(\xi = x)$ (probabilitatea ca v.a. ξ sa ia valoarea x)

Functia de repartitie a v.a. ξ este o functie $F_\xi : \mathrm{R} \rightarrow [0;1]$ $\qquad F_\xi(\mathrm{x}) = P(\xi < \mathrm{x})$

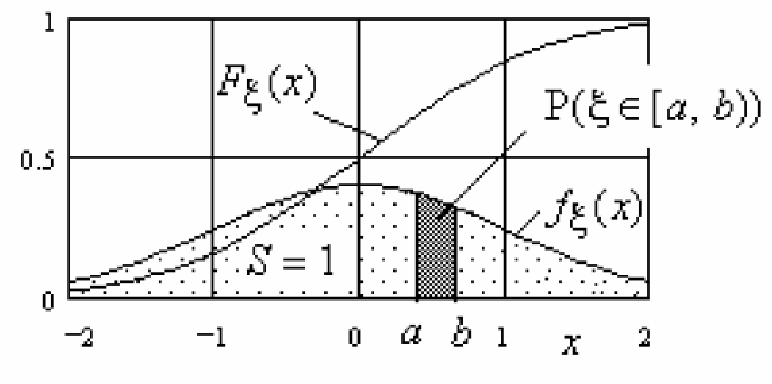
Definitie: Daca functia de repartitie a unei v.a. continue este absolut continua, atunci derivata sa se numeste ***densitate de repartitie:***

$$f_\xi(x) = \frac{\partial F_\xi(x)}{\partial x}; \qquad F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(x)\mathrm{d}x$$

Pentru v.a. discrete: $\quad f_\xi(x) = P(\xi = x); \qquad F_\xi(x) = \sum_{x_i < x} f_\xi(x_i) = P(\xi < x)$

Proprietatile functiei de repartitie

1. $F_\xi(-\infty) = 0 \qquad P(\underbrace{\xi < -\infty}_{=\theta}) = 0$
2. $F_\xi(\infty) = 1 \qquad P(\underbrace{\xi < \infty}_{=\Omega}) = 1$
3. $x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad F_\xi(x_1) \le F_\xi(x_2)$
4. $\forall x \;\Rightarrow\; F_\xi(x-0) = F_\xi(x)$



Proprietatile densitatii de repartitie

1. $\forall x \qquad f_\xi(x) \ge 0$
2. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f_\xi(x) = 0$
3. $F_\xi(\infty) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)\,\mathrm{d}x = 1; \qquad \left(\sum\limits_i f_\xi(x_i) = 1 \right)$
4. $\mathrm{P}(\xi \in [a, b)) = \int\limits_a^b f_\xi(x)\,\mathrm{d}x = F_\xi(b) - F_\xi(a); \qquad \left(\mathrm{P}(\xi \in I) = \sum\limits_{x_i \in I} f_\xi(x_i) \right)$

4' $\mathrm{P}(\xi \in [\Delta x)) \approx f_\xi(x) \cdot \Delta x$

CARACTERISTICI NUMERICE ALE VARIABILELOR ALEATORII

Moment initial de ordinul n $\mathrm{M}_n(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f_\xi(x)\,\mathrm{d}x; \quad \left(\mathrm{M}_n(\xi) = \sum_{i \in I} x_i^n f_\xi(x_i)\right)$

Media (speranta matematica) $\mathrm{M}(\xi) = \mathrm{M}_1(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_\xi(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\xi}; \quad \left(\mathrm{M}(\xi) = \sum_{i \in I} x_i\, f_\xi(x_i) = \overline{\xi}\right)$

***Mediana* (Me)** $\mathrm{P}(\xi < \mathrm{Me}) = \frac{1}{2}$

***Moda* (Mo) =** cea mai frecventa valoare (v.a. discrete)

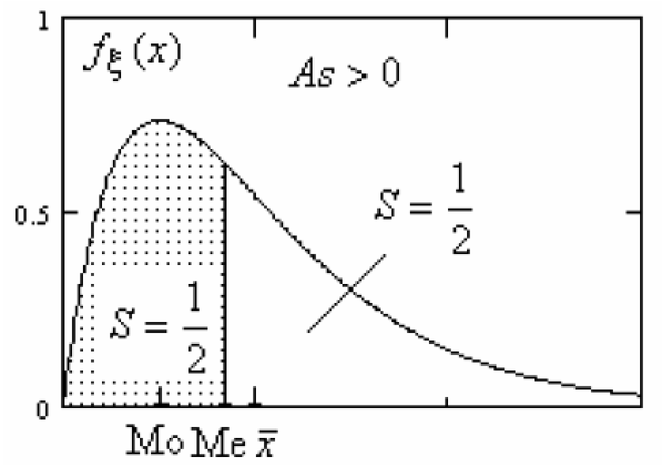
= valoarea pentru care densitatea de repartitie e maxima (v.a. continue)

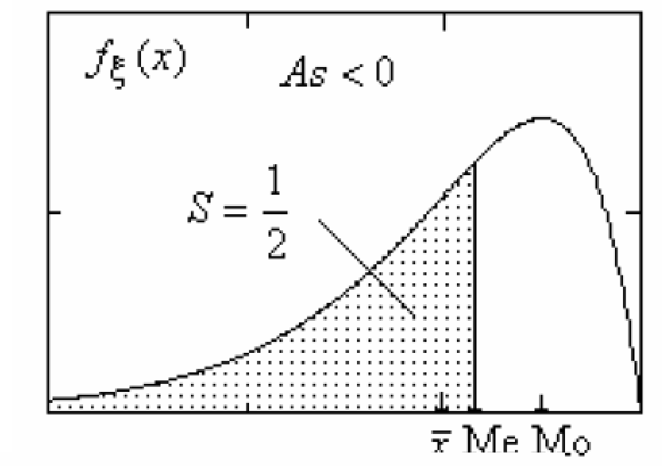
Moment centrat de ordinul n $\mu_n(\xi) = \mathrm{M}_n\left[(\xi - \overline{\xi})\right] = \mathrm{M}\left[(\xi - \overline{\xi})^n\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \overline{x})^n f_\xi(x)\,\mathrm{d}x$

Dispersia $\mathrm{D}(\xi) = \sigma_\xi^2 = \mu_2(\xi) = \mathrm{M}\left[(\xi - \overline{\xi})^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \overline{x})^2 f_\xi(x)\,\mathrm{d}x \quad \left(\sum_i (x_i - \overline{x}_i)^2 f_\xi(x_i)\right)$

Abaterea medie patratica (deviatia standard) $\sigma_\xi(x) = \sqrt{D(\xi)}$

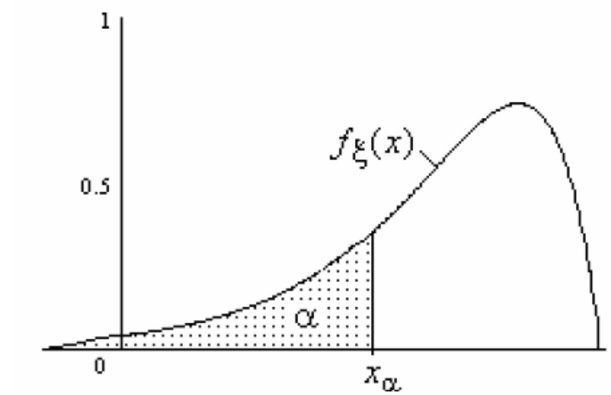
Asimetria $As = \frac{\mu_3(\xi)}{\sigma_\xi^3}$ ***Excesul*** $Ex = \frac{\mu_4(\xi)}{\sigma_\xi^4} - 3$





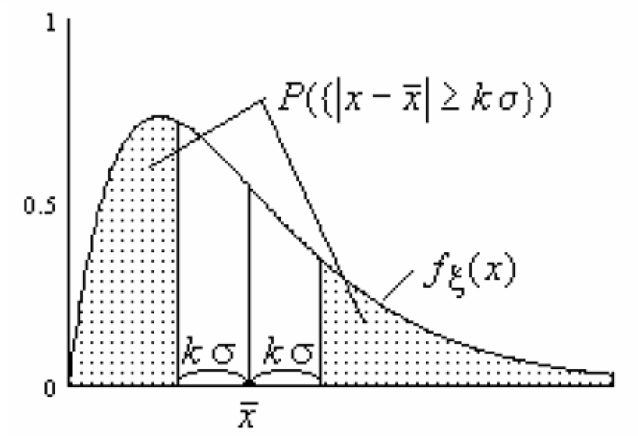
$\boldsymbol{x_\alpha}$ **= α *cuantila*** daca

$$P(\xi < x_\alpha) = \alpha$$



Inegalitatea lui Cebasev

$$P(\{|x - \bar{x}| < k\sigma\}) > 1 - \frac{1}{k^2}$$



ELEMENTE DE TEORIA FIABILITATII

Definitii calitative

FIABILITATEA = siguranta in functionare [Mihoc]

= siguranta in exploatare [DEX ’98]

= capacitatea sistemelor tehnice de a functiona un timp indelungat mentinandu-si parametrii prestabiliti [NODEX]

Definitie cantitativa

FIABILITATEA = probabilitatea ca un sistem sa-si indeplineasca functiile, cu anumite performante si fara defectiuni, intr-un anumit interval de timp si in conditii de exploatare date [Mihoc]

PRINCIPALII INDICATORI DE FIABILITATE

Definitii probabilistice

Probabilitatea de defectare (***functia de repartitie a duratei de buna functionare***)

$q(t) = P(\tau < t) = F_\tau(t)$ $\qquad$ τ = ***durata de buna functionare***

Probabilitatea de buna functionare (***functia de fiabilitate***)

$p(t) = P(\tau \geq t) = 1 - F_\tau(t) = 1 - q(t)$

Frecventa relativa de defectare (***densitatea de repartitie a lui*** τ)

$f_\tau(t) = P(t \leq \tau < t - 1) = \mathrm{d}F_\tau(t) / \mathrm{d}t$

Intensitatea de defectare (***rata defectelor***)

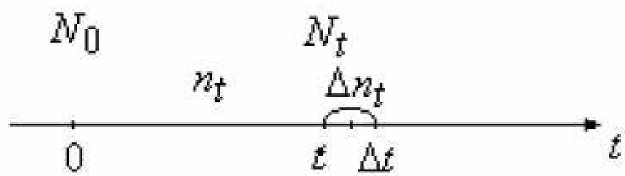
$\lambda(t) = P(t \leq \tau < t - 1 | \tau \geq t) = f_\tau(t) / p(t)$

Media timpilor de buna functionare (***MTBF***)

$$M(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} t\, f_\tau(t)\mathrm{d}t$$

PRINCIPALII INDICATORI DE FIABILITATE

Definitii statistice. Estimarea indicatorilor



$$\hat{q}(t) = \frac{n_t}{N_0}$$

N_0 = nr. de dispozitive aflate in stare de functionare la momentul initial

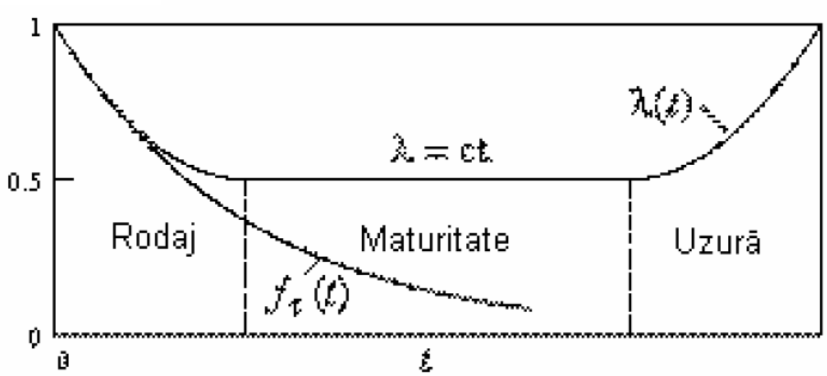
$$\hat{p}(t) = \frac{N_0 - n_t}{N_0}$$

N_t = nr. de dispozitive aflate in stare de functionare la momentul *t*

$$\hat{f}_\tau(t) = \frac{\Delta n_t}{N_0\, \Delta t}$$

n_t = nr. de defecte pana la momentul *t*

$$\hat{\lambda}(t) = \frac{\Delta n_t}{N_t\, \Delta t}$$



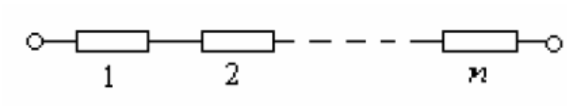
$$\text{MTBF} = \hat{T} = \frac{\sum_i n_i\, \tau_i}{\sum_i n_i}$$

Relatiile dintre principalii indicatorii de fiabilitate

	p	q	f_τ	λ	$\lambda = ct.$
p	-	$1-q$	$1-\int_0^t f_\tau(t)\,\mathrm{d}t$	$e^{-\int_0^t \lambda(t)\mathrm{d}t}$	$e^{-\lambda t}$
q	$1-p$	-	$\int_0^t f_\tau(t)\,\mathrm{d}t$	$1-e^{-\int_0^t \lambda(t)\mathrm{d}t}$	$1-e^{-\lambda t}$
f_τ	$-\dot{p}$	$\dot{q}$	-	$\lambda e^{-\int_0^t \lambda(t)\mathrm{d}t}$	$\lambda e^{-\lambda t}$
λ	$\dfrac{-\dot{p}}{p}$	$\dfrac{\dot{q}}{1-q}$	$\dfrac{f_\tau(t)}{1-\int_0^t f_\tau(t)\,\mathrm{d}t}$	-	-

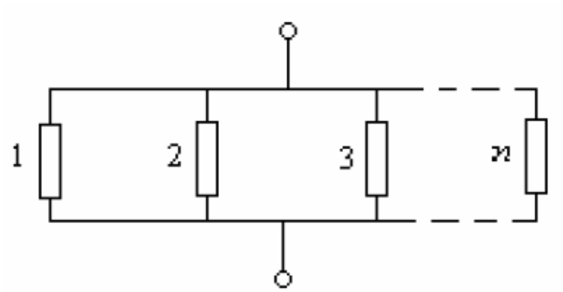
FIABILITATEA SISTEMELOR

Sistem de tip serie cu elemente independente



$$p_\Sigma(t) = \prod_{i=1}^{n} p_i(t) = e^{-\lambda_\Sigma t}, \quad \lambda_\Sigma = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i, \quad MTBF = \frac{1}{\lambda_\Sigma}$$

Sistem de tip paralel cu elemente independente

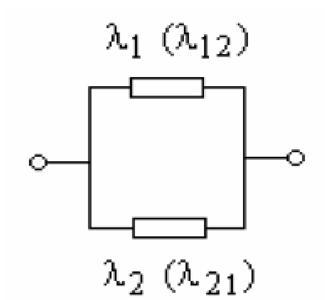


$$p_\Sigma(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n} \left[1 - p_i(t)\right]$$

$$\lambda_i = \lambda = \frac{1}{\tau} = ct \quad \Rightarrow \quad MTBF = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{i} + \frac{1}{\lambda}(n-m)$$

***1* =** element de baza, ***m-1* =** nr. rezerve calde (incarcate), ***n-m* =** nr. rezerve reci (descarcate)

Sistem de tip paralel cu elemente dependente



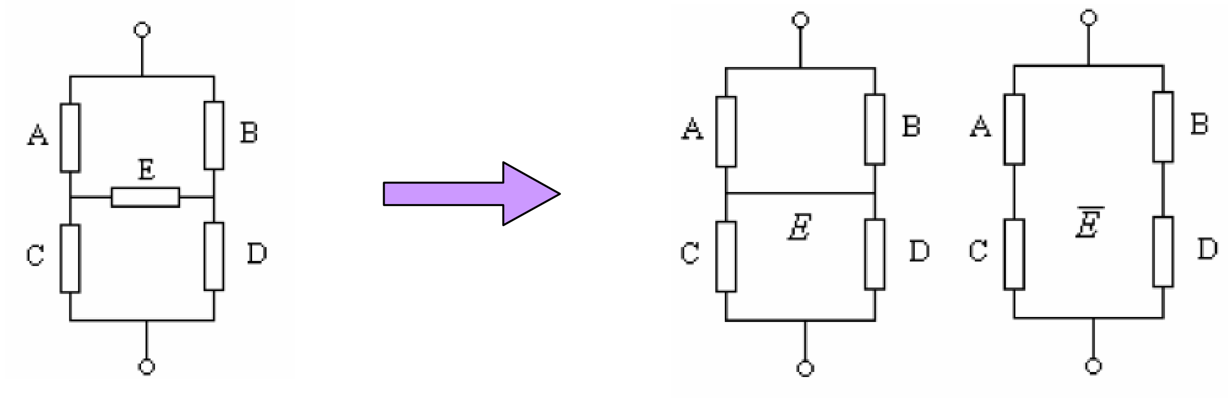
$$MTBF = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2}\left(1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_{21}} + \frac{\lambda_2}{\lambda_{12}}\right) \underset{\lambda_{12} = \lambda_{21} = \lambda'}{\overset{\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=}} \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\lambda}{\lambda'} + \frac{1}{2}\right) \overset{\lambda = \lambda'}{=\!=\!=} \frac{1}{\lambda}\left(1 + \frac{1}{2}\right)$$

λ_1, λ_2 = intensitatile de defectare la functionare simultana

λ_{12}, λ_{21} = intensitatile de defectare cand elementul vecin este defect

FIABILITATEA SISTEMELOR

Sistem cu structura oarecare. Conexiunea in punte



$$p_i(t) = e^{-\lambda_i t}$$

$\{E, \overline{E}\}$ **=** ***sistem complet de evenimente***

Formula probabilitatilor totale $\mathrm{P}(F) = \mathrm{P}(F \mid E)\,\mathrm{P}(E) + \mathrm{P}(F \mid \overline{E})\,\mathrm{P}(\overline{E})$

$$\mathrm{P}(F \mid E) = \left[1 - \left(1 - \mathrm{P}(A)\right)\left(1 - \mathrm{P}(B)\right)\right]\left[1 - \left(1 - \mathrm{P}(C)\right)\left(1 - \mathrm{P}(D)\right)\right]$$

$$\mathrm{P}(F \mid \overline{E}) = 1 - \left(1 - \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(C)\right)\left(1 - \mathrm{P}(B)\,\mathrm{P}(D)\right)$$

$$\mathrm{P}(F) = p_\Sigma(t) = e^{-\lambda_{\mathrm{E}} t}\left[1 - \left(1 - e^{-\lambda_{\mathrm{A}} t}\right)\left(1 - e^{-\lambda_{\mathrm{B}} t}\right)\right]\left[1 - \left(1 - e^{-\lambda_{\mathrm{C}} t}\right)\left(1 - e^{-\lambda_{\mathrm{D}} t}\right)\right] +$$
$$+ \left(1 - e^{-\lambda_{\mathrm{E}} t}\right)\left[1 - \left(1 - e^{-(\lambda_{\mathrm{A}} + \lambda_{\mathrm{C}}) t}\right)\left(1 - e^{-(\lambda_{\mathrm{B}} + \lambda_{\mathrm{D}}) t}\right)\right]$$

SISTEME SI STRUCTURI MONOTONE

Variabila binara

$$x_i = \begin{cases} 1 - \text{elementul } i \text{ capabil de functionare} \\ 0 - \text{elementul } i \text{ defect} \end{cases}$$

Functia de structura

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1 - \text{sistemul capabil de functionare} \\ 0 - \text{sistem defect} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad n = \text{ordinul sistemului}$$

Structura *k* din *n*

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, \text{ si } \sum_{i=1}^{n} x_i \geq k \\ 0, \text{ si } \sum_{i=1}^{n} x_i < k \end{cases}$$

Structura duala

$$\varphi^{\mathrm{D}}(\boldsymbol{x}) = 1 - \varphi(\boldsymbol{1} - \boldsymbol{x}); \qquad \boldsymbol{1} - \boldsymbol{x} = (1 - x_1, \ldots, 1 - x_n)$$

$$\varphi_{\text{serie}}(\boldsymbol{x}) = \min\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \qquad \text{Structura serie = “}n \text{ din } n\text{”}$$

$$\varphi_{\text{paralel}}(\boldsymbol{x}) = \max\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \qquad \text{Structura paralel = “}1 \text{ de } n\text{”}$$

Structura duala a conexiunii serie (paralel) = structura paralel (serie)

Elementul i = **neesential** daca:

$$(x_1,\dots x_{i-1},1,x_{i+1},\dots,x_n) = (x_1,\dots x_{i-1},0,x_{i+1},\dots,x_n)$$

Elementul i = **esential** daca exista ***x´*** astfel incat:

$$\varphi(x'_1,\dots x'_{i-1},1,x'_{i+1},\dots,x'_n) - \varphi(x'_1,\dots x'_{i-1},0,x'_{i+1},\dots,x'_n) = 1$$

O structura se numeste ***monotona*** daca toate elementele sale sunt esentiale si functia de structura este crescatoare:

$$\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{y} \quad \Leftrightarrow x_i \le y_i\,, \quad \forall i \quad \Rightarrow \varphi(\boldsymbol{x}) \le \varphi(\boldsymbol{y})$$

Fiabilitatea structurilor monotone

$$\mathrm{P}\big(\varphi(\boldsymbol{x}) = 1\big) = h(\boldsymbol{p}); \qquad \boldsymbol{p} = (p_1,\dots,p_n)\,; \qquad p_i = \mathrm{P}(x_i = 1)\,; \qquad i = 1,\dots,n$$

Fiabilitatea structurii *k* din *n*

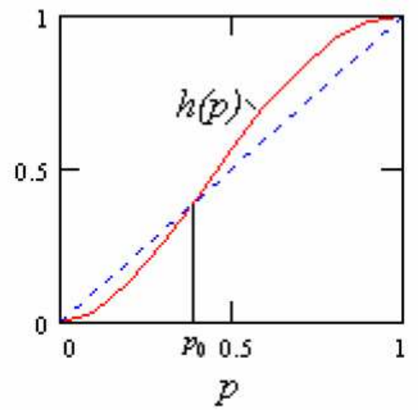
$$h(\boldsymbol{p}) = \sum_{i=k}^{n} \mathrm{C}_n^i\, p^i\, (1-p)^{n-i}$$

Teorema 1 a lui Moore si Shannon

Funcția de fiabilitate a unei structuri monotone este in forma de S:

Funcția $h(p)$ intersectează diagonala cel mult odată de jos in sus

Daca $h(p_0) = p_0$ atunci: pentru $p<p_0$ $h(p)< p$ si pentru $p > p_0$ $h(p) > p$



Teorema 2 a lui Moore si Shannon

Din toate structurile de ordinul n, structura "k din n" este cea mai « sensibila » fata de fiabilitatea elementului:

Funcția $h(p;k,n)$ intersectează funcția $h(p)$ cel mult odată si de jos in sus

Daca $h(p_0; k, n) = h(p_0)$ atunci pentru $p<p_0$ $h(p_0; k, n) < h(p)$

si pentru $p > p_0$ $h(p_0; k, n) > h(p)$

REPARTITII UTILIZATE IN FIABILITATE

- Repartitii discrete -

REPARTITIA BINOMIALA (BERNOULLI) se aplica in cazul a ***n*** extrageri independente ale unei bile dintr-o urna ce contine bile de doua culori in proportie cunoscuta. Independenta extragerilor se asigura intorcand in urna de fiecare data bila extrasa **(*schema bilei intoarse*)**

Probabilitatea ca din ***n*** extrageri sa obtinem ***x*** bile de o anumita culoare este:

$$P_n(x) = C_n^x p^x (1-p)^{n-x}$$

p = parametrul repartitiei (probabilitatea ca la o extragere sa obtinem o bila de culoarea dorita

Media v.a. binomiale $M(\xi) = np$

Dispersia v.a. binomiale $D(\xi) = np(1-p) = npq$

Deviatia standard $\sigma_\xi = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{npq}$

REPARTITII UTILIZATE IN FIABILITATE

- Repartitii discrete -

REPARTITIA HIPERGEOMETRICA se aplica in cazul a ***n*** extrageri succesive ale unei bile dintr-o urna ce contine bile de doua culori in numar cunoscut **(*schema bilei neintoarse*)**

Probabilitatea ca din ***n*** extrageri sa obtinem ***x*** bile de o anumita culoare este:

$$P_{hn}(x) = \frac{C_{n_1}^{x} C_{N-n_1}^{n-x}}{C_N^n}$$

n_1 = numarul bilelor de culoarea dorita
N = numarul total de bile

REPARTITII UTILIZATE IN FIABILITATE

- Repartitii discrete -

REPARTITIA POLINOMIALA (MULTINOMIALA) se aplica in cazul modalitatilor distincte de divizare a ***n*** elemente in ***m*** grupuri de cate $\boldsymbol{x_1, x_2, \ldots, x_m}$ elemente

Probabilitatea ca ***n*** elemente sa se divizeze in ***m*** grupuri de cate $\boldsymbol{x_1, x_2, \ldots, x_m}$ elemente este :

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \frac{n!}{x_1!\,x_2!\ldots x_m!}\, p_1^{x_1} p_2^{x_2} \ldots p_m^{x_m}$$

p_i = probabilitatea formarii unui grup de x_i elemente

REPARTITII UTILIZATE IN FIABILITATE

- Repartitii discrete -

REPARTITIA POISSON caracterizeaza numarul de evenimente independente care apar intr-un interval temporal sau spatial, in conditiile in care este cunoscut numarul mediu (***a***) de evenimente din intervalul considerat

Este cazul repartitiei binomiale de ordin ***n*** si parametru ***p*** pentru care: ***np*** = ***a***, $n \to \infty$, $p \to 0$ **(*legea evenimentelor rare*)**

Probabilitatea de a aparea ***x*** evenimente intr-un interval in care media lor de aparitie este ***a***, este:

$$P_x(a) = \lim_{n\to\infty} P_n(x) = \frac{a^x}{x!} e^{-a}$$

a = prametrul repartitiei

Media v.a. Poisson $M(\xi) = \lim_{n\to\infty} np = a$

Dispersia v.a. Poisson $D(\xi) = \lim_{n\to\infty} npq = a$

Deviatia standard $\sigma_\xi = \sqrt{D(\xi)} = \sqrt{a}$

REPARTITII UTILIZATE IN FIABILITATE

- Repartitii discrete -

REPARTITIA GEOMETRICA se aplica in cazul unei succesiuni de experiente identice independente, fiecare avand o probabilitate de succes ***p***

Probabilitatea obtinerii a ***x*** tentative nereusite inaintea primului succes este:

$$P(x) = (1 - p)^x p = q^x p$$

Media v.a. geometrice $$M(\xi) = \frac{q}{p}$$

Dispersia v.a. geometrice $$D(\xi) = \frac{q}{p^2}$$

Deviatia standard $$\sigma_\xi = \sqrt{D(\xi)} = \frac{\sqrt{q}}{p}$$

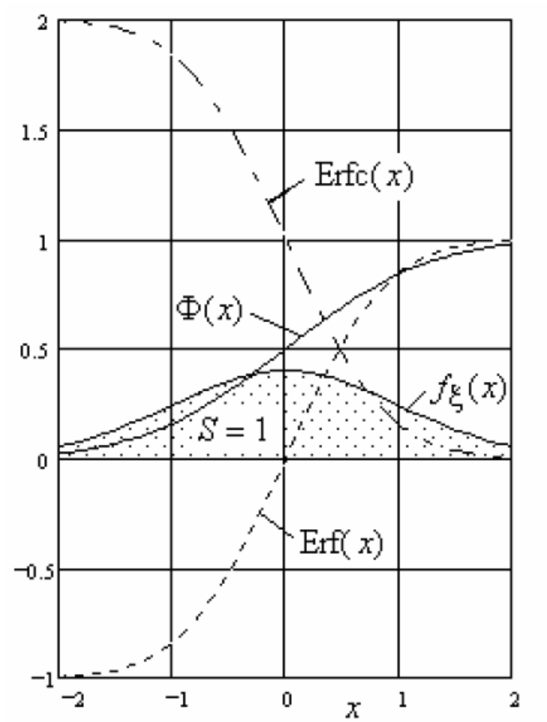
REPARTITII UTILIZATE IN FIABILITATE

- Repartitii continue -

REPARTITIA NORMALA

de ***medie* 0** si ***deviatie standard* 1** [N(0,1)]:

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}; \qquad F_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$$



Repartitia normala multidimensionala

$$f_\xi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{\Delta}} \exp\left[-\frac{1}{2}(x-\bar{x})' \cdot \boldsymbol{K}^{-1} \cdot (x-\bar{x})\right]$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sigma_1^2 & K_{12} & \ldots & K_{1n} \\ K_{21} & \sigma_2^2 & \ldots & K_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ K_{n1} & K_{n2} & \ldots & \sigma_n^2 \end{vmatrix}; \qquad \begin{aligned} K_{ij} &= K_{ji} = cov(x_i, y_j) \\ \mathrm{D}_i &= \sigma_i^2 = K_{ii} \end{aligned}$$

K = matricea de covariatie

REPARTITII UTILIZATE IN FIABILITATE

- Repartitii continue -

REPARTITIA GAMMA GENERALIZATA

$$f_\tau(t) = \begin{cases} C\, t^{k-1} e^{-\lambda t^\alpha}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Functia gamma $\quad \Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} \mathrm{d}t \qquad J_n = \int_0^\infty x^{k+n-1} e^{-\lambda x^\alpha} dx = \Gamma\left(\frac{k+n}{\alpha}\right)$

Conditia de normalizare $\quad \int_{-\infty}^{\infty} f_\tau(t) \mathrm{d}t = 1$

$$\Rightarrow \quad C = \frac{1}{J_0} = \frac{\alpha \lambda^{k/\alpha}}{\Gamma\left(\frac{k}{\alpha}\right)} \qquad \Rightarrow \quad f_\tau(t) = \frac{\alpha\lambda^{k/\alpha}}{\Gamma(k/\alpha)} t^{k-1} e^{-\lambda t^\alpha}, \qquad t \geq 0$$

REPARTITII UTILIZATE IN FIABILITATE

- Repartitii continue -

REPARTITIA GAMMA GENERALIZATA

C a z u r i   p a r t i c u l a r e:

1. **REPARTITIA GAMMA,**	$\alpha = 1$
2. **REPARTITIA WEIBULL,**	$\alpha = k$
3. **REPARTITIA EXPONENTIALA,**	$\alpha = k = 1$
4. **REPARTITIA ERLANG,**	$\alpha = 1, k = 2$
5. **REPARTITIA RAYLEGH,**	$\alpha = k = 2$
6. **REPARTITIA MAXWELL,**	$\alpha = 2, k = 3$
7. **REPARTITIA** χ^2 cu ***n*** grade de libertate**,**	$\alpha = 1, k = n/2, \lambda = 1/2$

TEORIA ESTIMATIEI

V.a. ξ de parametru ***a*** → ***Esantion de talie n:*** $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Estimatorul parametrului a: $\hat{a} = \varphi\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

CONDITII IMPUSE ESTIMATORILOR

Pentru a fi suficient de convenabil, un estimator trebuie sa fie:

1. ***nedeplasat (absolut corect)*** $M(\hat{a}) = a$
2. ***consistent*** $\hat{a} \xrightarrow[P]{n\to\infty} a$
3. ***eficace*** $D(\hat{a}) = \min$

Estimarea mediei:

$$\hat{\mathrm{M}}(\xi) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$ (***medie statistica***)

Estimarea dispersiei:

$$\mathrm{D}^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{\xi}\right)^2$$

D^* = estimator deplasat (*dispersia necorectata*)

$$\hat{\mathrm{D}} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{\xi}\right)^2$$

$\hat{\mathrm{D}}$ = estimator nedeplasat (*dispersia corectata*)

$$\hat{\mathrm{D}} = \frac{n}{n-1}\mathrm{D}^*$$

Definitie: Intervalul [h_1; h_2] care acopera cu o mare probabilitate valoarea reala a parametrului ***a*** se numeste ***interval de incredere***

$$P\,[\,h_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le a \le h_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,] = \delta \rightarrow 1$$

δ = ***prag de incredere***

INCERCARI DE FIABILITATE

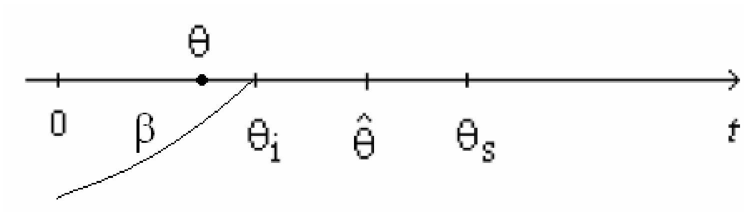
- *Incercari trunchiate*
- *Incercari cenzurate*
- *Incercari secventiale (progresive)*
- *Incercari secventiale (progresive) trunchiate*

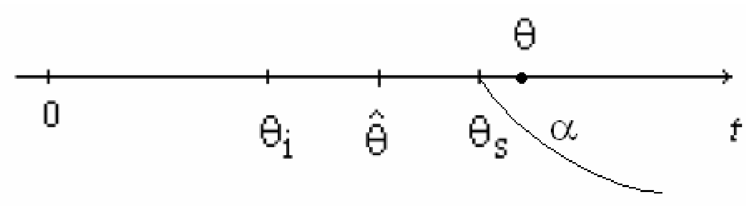
- *Incercari cu inlocuire*
- *Incercari fara inlocuire*

Determinarea *MTBF* pe cale experimentala

Se considera o ***incercare trunchiata cu inlocuire*** ce consta in testarea a ***n*** produse identice pe standuri diferite, un timp prestabilit ***t*** , in urma careia se constata un numar de ***k*** defecte

Un estimator pentru MTBF este: $\hat{\theta} = \dfrac{n \cdot t}{k}$





α = *riscul furnizorului* (*risc de speta I*) (riscul de a nu putea vinde un produs bun)

β = *riscul beneficiarului* (*risc de speta a II-a*) (riscul de a cumpara un produs defect)

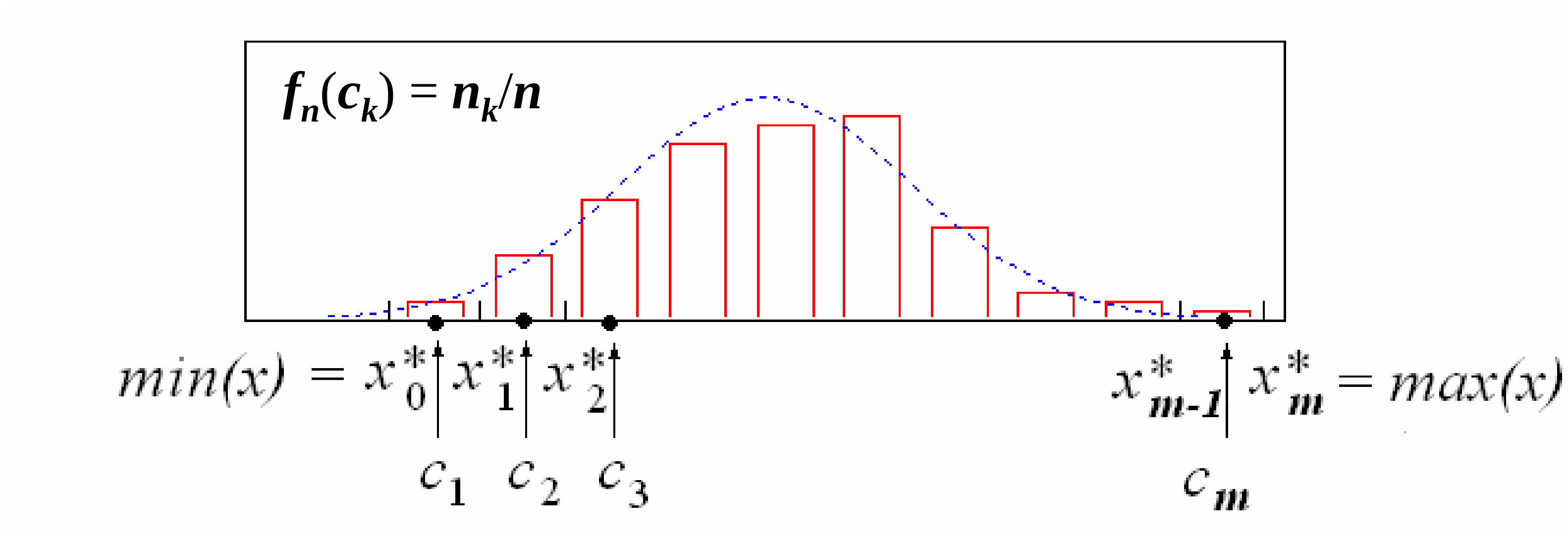
$\alpha = P(\theta_s \leq \theta)$ $\beta = P(\theta \leq \theta_i)$ $P(\theta \in [\theta_i ; \theta_s]) = 1 - \alpha - \beta = \delta$

$$\theta_s = \frac{2nt}{\chi^2_{\alpha}(2k)} \qquad \theta_i = \frac{2nt}{\chi^2_{1-\beta}(2k+2)}$$

intervalul de incredere pentru MTBF

HISTOGRAME

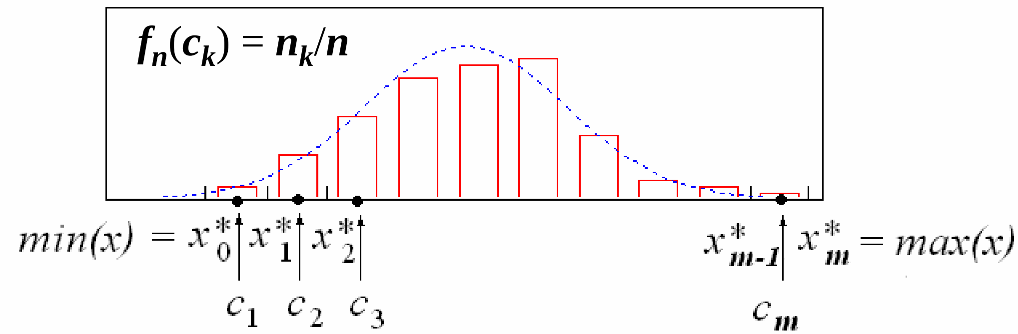
- Se considera o serie de n valori independente ale v.a. ξ: $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$
- Se cauta $min(x)$, $max(x)$
- Se imparte intervalul $[min(x); max(x)]$ in m clase de lungimi egale si centre c_k si se calculeaza frecventele cumulate n_k pe fiecare clasa, $k = \{1\ldots m\}$
- Se reprezinta grafic functia $f_n(c_k) = n_k/n \Rightarrow$ ***histograma***:



TEOREMA SI TESTUL LUI KOLMOGOROV

Se construieste functia de repartitie empirica $\boldsymbol{F_n(x)}$ utilizand frecventele cumulate si se propune o repartitie teoretica $\boldsymbol{F_\xi(x)}$ ce o aproximeaza cel mai bine:

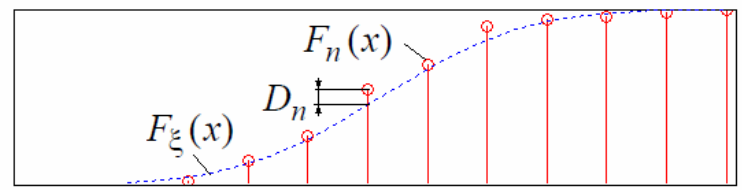
$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & x < x_1^* \\ \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{k-1} n_i & x_{k-1}^* < x \le x_k^* \\ 1 & x \ge x_m^* \end{cases}$$



Teorema lui Glivenko:

$$\mathrm{P}(\lim_{n\to\infty} D_n = 0) = 1$$

$$D_n = \sup_x \left| F_\xi(x) - F_n(x) \right| \qquad \lambda_n = \sqrt{n}\, D_n$$



Teorema lui Kolmogorov:

Daca $\boldsymbol{F_\xi(x)}$ este continua $\Rightarrow$ $\displaystyle \lim_{n\to\infty} P\left(\lambda_n < z\right) = \mathrm{K}(z) = \begin{cases} 0 & z \le 0 \\ \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k \exp(-2k^2 z^2) & z > 0 \end{cases}$

Testul lui Kolmogorov: Se face ***ipoteza*** ca v.a. ξ are repartitia teoretica $\boldsymbol{F_\xi(x)}$

- Daca $\lambda_n > \mathbf{1.5}$ ipoteza se respinge
- Daca $\mathbf{1} \le \lambda_n \le \mathbf{1.5}$ ipoteza este suspecta (se impune cresterea nr. de experiente)
- Daca $\lambda_n < \mathbf{1}$ nu exista motive pentru a respinge ipoteza